Statistik Bisnis

Week 5

Discrete Probability

Binomial and Poisson Distribution

Agenda

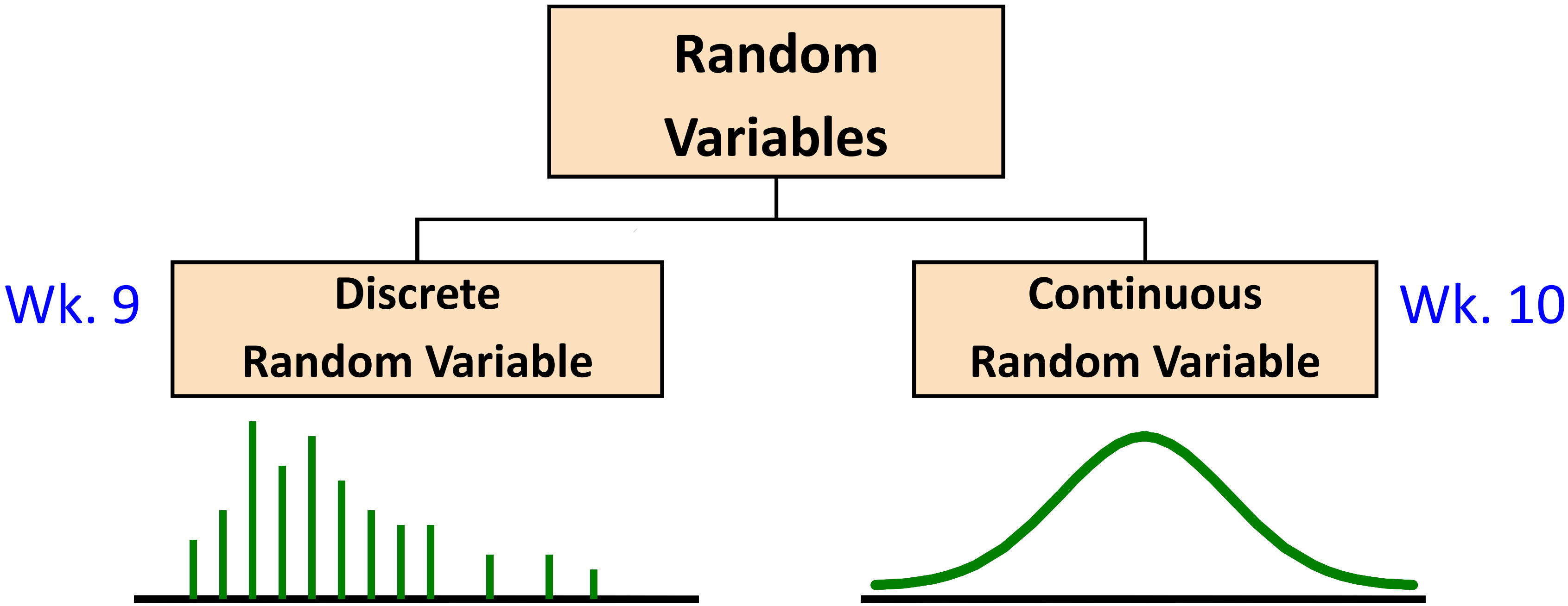
Time	Activity
50 minutes	Binomial Probability
50 minutes	Poisson Probability
100 minutes	Exercise

Learning Objectives

In this chapter, you learn:

- To understand when to use Binomial and Poisson distributions
- To compute probabilities from the Binomial and Poisson distributions

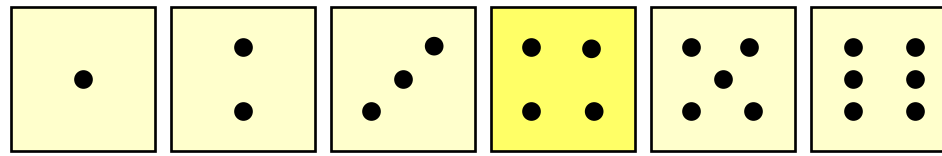
Random Variables



Discrete Random Variables

Can only assume a countable number of values

Examples:



- **Roll a die twice**

  Let X be the number of times 4 occurs

  (then X could be 0, 1, or 2 times)

- **Toss a coin 5 times.**

  Let X be the number of heads

  (then X = 0, 1, 2, 3, 4, or 5)

Probability Distribution For A Discrete Random Variable

A probability distribution for a discrete random variable is a mutually exclusive listing of all possible numerical outcomes for that variable and a probability of occurrence associated with each outcome.

Number of Classes Taken	Probability
2	0.20
3	0.40
4	0.24
5	0.16

Definitions
Random Variables

- A **random variable** represents a possible numerical value from an uncertain event.

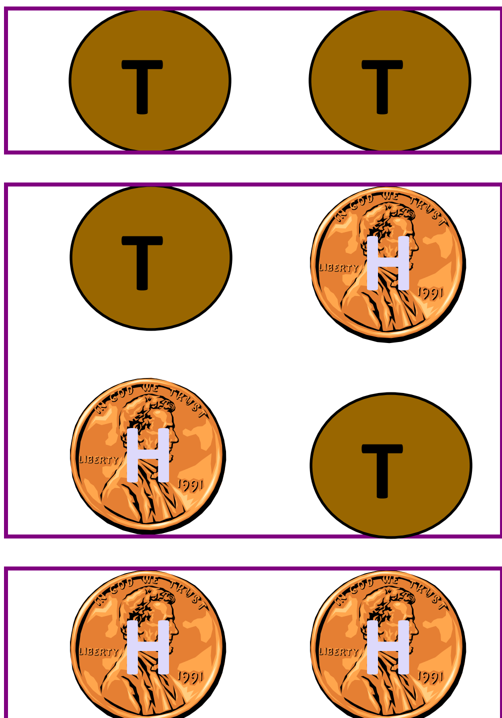
- **Discrete** random variables produce outcomes that come from a counting process (e.g. number of classes you are taking).

- **Continuous** random variables produce outcomes that come from a measurement (e.g. your annual salary, or your weight).

Example of a Discrete Random Variable Probability Distribution

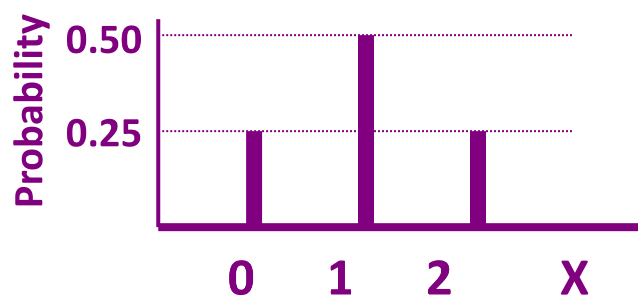
Experiment: Toss 2 Coins. Let X = # heads.

4 possible outcomes

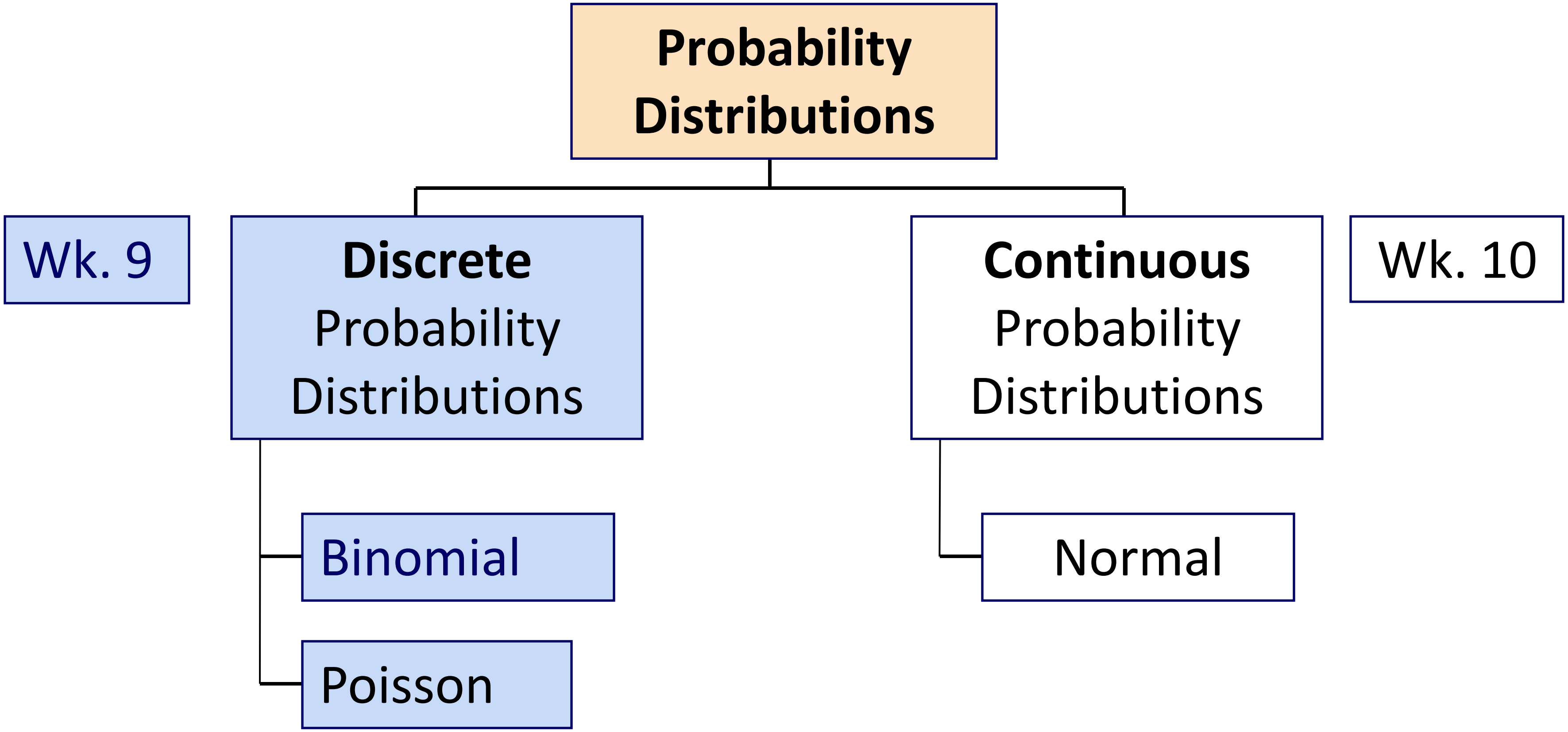


Probability Distribution

X Value	Probability
0	1/4 = 0.25
1	2/4 = 0.50
2	1/4 = 0.25



Probability Distributions



BINOMIAL PROBABILITY DISTRIBUTION

Binomial Probability Distribution

- A fixed number of observations, n
  - e.g., 15 tosses of a coin; ten light bulbs taken from a warehouse
- Each observation is categorized as to whether or not the "event of interest" occurred
  - e.g., head or tail in each toss of a coin; defective or not defective light bulb
  - Since these two categories are mutually exclusive and collectively exhaustive
    - When the probability of the event of interest is represented as π, then the probability of the event of interest not occurring is 1 - π
- Constant probability for the event of interest occurring (π) for each observation
  - Probability of getting a tail is the same each time we toss the coin

Binomial Probability Distribution

(continued)

- Observations are independent
  - The outcome of one observation does not affect the outcome of the other
  - Two sampling methods deliver independence
    - Infinite population without replacement
    - Finite population with replacement

Possible Applications for the Binomial Distribution

- A manufacturing plant labels items as either defective or acceptable
- A firm bidding for contracts will either get a contract or not
- A marketing research firm receives survey responses of “yes I will buy” or “no I will not”
- New job applicants either accept the offer or reject it

Binomial Distribution Formula

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \pi^{X} (1-\pi)^{n-X}$$

P(X) = probability of **X** events of interest in **n** trials,
with the probability of an "event of interest" being **π** for each trial

X = number of "events of interest" in sample, (X = 0, 1, 2, ..., n)

n = sample size (number of trials or observations)

π = probability of "event of interest"

Example: Flip a coin four times, let x = # heads:

n = 4

π = 0.5

1 - π = (1 - 0.5) = 0.5

X = 0, 1, 2, 3, 4

Example

Restoran cepat saji McDonald’s memiliki tingkat ketepatan pemenuhan pesanan (order) sebesar 85%. Jika anda dan 2 orang teman anda pergi ke McDonald’s dan melakukan tiga pesanan yang saling bebas, berapakah peluang (a) ketiga pesanan tersebut, (b) tidak ada diantara ketiga pesanan tersebut, dan (c) paling tidak dua dari tiga pesanan tersebut dipenuhi dengan tepat?

Example (Answer)

$n = 3$

$\pi = 0.85$

a. $P(X=3) = 0.6141$

b. $P(X=0) = 0.0034$

c. $P(X\geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$

$= 0.3251 + 0.6141 = 0.9392$

Binomial Distribution Characteristics

- Mean

$$\mu = E(x) = n\pi$$

- Variance and Standard Deviation

$$\sigma^2 = n\pi(1 - \pi)$$

$$\sigma = \sqrt{n\pi(1 - \pi)}$$

Where n = sample size

π = probability of the event of interest for any trial

(1 – π) = probability of no event of interest for any trial

Example

Untuk contoh McDonald’s sebelumnya, berapakah rata-rata (mean) dan simpangan baku (standard deviation) dari ketepatan pelayanan pada restoran cepat saji tersebut?

Example (Answer)

- $\mu = n\pi = 3 * 0.85 =$ **2.55**
- $\sigma = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$

  $= \sqrt{3*0.85(1-0.85)}$

  $= \sqrt{0.3825} =$ **0.6185**

The Binomial Distribution Using Binomial Tables

n = 10									
x	…	π=.20	π=.25	π=.30	**π=.35**	π=.40	π=.45	π=.50	
0	…	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	10
1	…	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098	9
2	…	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439	8
3	…	0.2013	0.2503	0.2668	**0.2522**	0.2150	0.1665	0.1172	7
4	…	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051	6
5	…	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461	5
6	…	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051	4
7	…	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172	3
8	…	0.0001	**0.0004**	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439	**2**
9	…	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098	1
10	…	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0
	…	π=.80	**π=.75**	π=.70	π=.65	π=.60	π=.55	π=.50	**x**

Examples:

n = 10, π = .35, x = 3: $P(x = 3|n = 10, \pi = .35) = .2522$

n = 10, π = .75, x = 2: $P(x = 2|n = 10, \pi = .75) = .0004$

POISSON PROBABILITY DISTRIBUTION

The Poisson Distribution Definitions

- You use the **Poisson distribution** when you are interested in the number of times an event occurs in a given **area of opportunity**.
- An **area of opportunity** is a continuous unit or interval of time, volume, or such area in which more than one occurrence of an event can occur.
  - The number of scratches in a car's paint
  - The number of mosquito bites on a person
  - The number of computer crashes in a day

The Poisson Distribution

- Apply the Poisson Distribution when:
  - You wish to count the number of times an event occurs in a given area of opportunity
  - The probability that an event occurs in one area of opportunity is the same for all areas of opportunity
  - The number of events that occur in one area of opportunity is independent of the number of events that occur in the other areas of opportunity
  - The probability that two or more events occur in an area of opportunity approaches zero as the area of opportunity becomes smaller
  - The average number of events per unit is λ (lambda)

Poisson Distribution Formula

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{X!}$$

where:

X = number of events in an area of opportunity

λ = expected number of events

e = base of the natural logarithm system (2.71828...)

Example

Rata-rata jumlah kecelakaan kerja pada sebuah perusahaan konstruksi berkisar pada 2,5 kecelakaan per bulan. Berapakah peluang pada bulan tertentu (a) tidak terdapat kecelakaan kerja, dan (b) paling tidak terjadi satu kecelakaan kerja?

Example (Answer)

$\lambda = 2{,}5$

a. $P(X=0) = 0.0821$

b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - 0.0821$

$= 0.9179$

Poisson Distribution Characteristics

- Mean

$$\boxed{\mu = \lambda}$$

- Variance and Standard Deviation

$$\boxed{\sigma^2 = \lambda}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\lambda}}$$

where λ = expected number of events

Using Poisson Tables

	λ								
X	0.10	0.20	0.30	0.40	**0.50**	0.60	0.70	0.80	0.90
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	**0.0758**	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Example: Find P(X = 2) if $\lambda = 0.50$

$$P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-0.50}(0.50)^2}{2!} = 0.0758$$

EXERCISE

Exercise 1

Kementrian Perhubungan melaporkan, pada tahun 2013, diantara semua maskapai penerbangan domestik, Garuda memimpin dalam hal ketepatan waktu kedatangan, yaitu pada kisaran 0.85. Berapakah peluang bahwa dalam enam penerbangan berikutnya:

a. Empat penerbangan akan tepat waktu?
b. Kesemua penerbangan akan tepat waktu?
c. Setidaknya empat penerbangan akan tepat waktu?
d. Berapakah rata-rata (mean) dan simpangan baku (standard deviation) dari jumlah kedatangan tepat waktu?

Exercise 2

Manajer *Quality Control* dari Arnott's Biscuits sedang memeriksa satu *batch* Biskuit Good Time yang baru saja di panggang. Jika proses produksinya terkontrol, rata-rata jumlah butiran coklat per biskuit adalah 6,0. Berapakah peluang pada sebuah biskuit yang diperiksa terdapat:

a. Kurang dari lima butiran coklat ditemukan?
b. Tepat lima butiran coklat ditemukan?
c. Lima atau lebih butiran coklat ditemukan?
d. Empat atau lima butiran coklat ditemukan?

CLASS EXERCISE

1

Kesalahan proses penagihan sering menyebabkan ketidakpuasan konsumen dan pada akhirnya akan mengakibatkan terganggunya aliran profit. Sebuah artikel membahas sebuah perusahaan yang 40% tagihannya memiliki kesalahan. Jika terdapat 10 tagihan yang sedang diproses, berapakah peluang

a. 0 tagihan memiliki kesalahan?
b. Tepat 1 tagihan memiliki kesalahan?
c. 2 atau lebih tagihan memiliki kesalahan?
d. Berapakah rata-rata dan simpangan baku dari distribusi peluang tersebut?

2

Setelah dilakukan upaya peningkatan mutu, terdapat pengurangan jumlah tagihan yang memiliki kesalahan menjadi 20%. Jika dipilih 10 tagihan untuk diproses, berapakah peluang

a. 0 tagihan memiliki kesalahan?
b. Tepat 1 tagihan memiliki kesalahan?
c. 2 atau lebih tagihan memiliki kesalahan?
d. Berapakah rata-rata dan simpangan baku dari distribusi peluang tersebut?
e. Bandingkan hasil dari poin (a) hingga (c) pada ini dengan soal sebelumnya.

3

Diperkirakan terdapat 300 juta bola golf yang hilang di Amerika Serikat mada tahun 2009. Jika rata-rata hilangnya bola golf pada sebuah lapangan golf adalah 5 bola. Berapakah peluang

a. 0 bola akan hilang pada lapangan golf tersebut?
b. 5 bola atau kurang akan hilang pada lapangan tersebut?
c. 6 atau lebih bola akan hilang pada lapangan tersebut?

4

Pada akhir 2007, dilaporkan 79% orang dewasa di Amerika Serikat memiliki telepon selular. Misalkan pada akhir 2009, jumlahnya menjadi 85%. Jika diambil sampel 10 orang dewasa di Amerika Serikat, berapakah peluang

a. 8 diantaranya memiliki telepon selular?
b. paling tidak 8 orang memiliki telepon selular?
c. semuanya memiliki telepon selular?
d. Jika anda memilih sampel dari wilayah tertentu, dan tidak ada diantara ke 10 responden tersebut memiliki telepon selular, apa kesimpulan yang mungkin anda dapatkan mengenai pernyataan bahwa kepemilikan telepon selular di wilayah tersebut 85%?

5

J.D. Power and Associates menghitung dan menerbitkan beragam statistik mengenai kualitas mobil. Nilai kualitas yang dikeluarkan menyatakan rata-rata jumlah masalah yang ditemui pada setiap mobil baru yang terjual. Untuk mobil produksi 2009, Ford memiliki rata-rata 1.02 masalah per mobil, sementara itu Dodge memiliki 1.34 masalah per mobil. Jika anda membeli Ford 2009, berapakah peluang bahwa mobil baru tersebut akan memiliki

a. nol masalah?
b. dua atau kurang masalah?

6

Jika anda memilih untuk membeli Dodge, bagaimana peluang terdapat

a. nol masalah?
b. dua atau kurang masalah?
c. Bandingkan jawaban anda dengan jawaban pada soal sebelumnya.

HOME EXERCISE

1

Menurut pengamatan, rata-rata jumlah kecelakan yang memerlukan ambulans di jalan tol antara jam 7.00 – 8.00 pagi adalah 1. Berapakah peluang:

a. Diperlukan tepat 2 ambulans di jalan tol pada rentang waktu tersebut?
b. Tidak diperlukan ambulans pada rentang waktu tersebut?

2

Peluang bahwa seseorang diterima di Telkom Universiry adalah 0.3. Jika 5 orang siswa mendaftar ke sekolah tersebut, berapakah peluang

a. 2 diantaranya akan diterima?
b. Semuanya diterima?
c. Lebih dari 2 diterima?

3

Untuk memasuki sebuah Universitas ditentukan oleh nilai ujian nasional. Nilai pada ujian ini memiliki rata-rata 500 dan simpangan baku 100. Tom ingin diterima di universitas tersebut dan dia tahu bahwa nilainya harus paling tidak 70% lebih baik dari semua siswa yang mengikuti ujian tersebut. Tom mendapatkan nilai 585. Apakah Tom akan diterima di universitas tersebut?

4

Lima kotak berisikan komponen komputer dikirim kepada sebuah toko. Sekitar 15% dari komponen tersebut biasanya akan memiliki kerusakan.

a. Berapakah peluang terdapat satu kotak yang tidak memiliki kerusakan.

b. Jika terdapat 10 kotak yang dikirim, berapa peluang paling tidak 8 kotak diantaranya tidak memiliki komponen yang mengalami kerusakan

5

Bakteri sejenis coliform terdistribusi secara acak di sungai Cikapundung dengan rata-rata konsentrasi 1 per 20cc air. Jika kita mengambil sampel air sebanyak 10cc dari sungai tersebut, berapakah peluang

a. Terdapat tepat 2 bakteri sejenis coliform?
b. Tidak terdapat bakteri sejenis coliform?
c. Terdapat lebih dari 2 bakteri sejenis coliform?

6

Sebuah unit radar digunakan untuk mengukur kecepatan mobil di jalan raya. Kecepatan yang tercatat berdistribusi normal dengan rata-rata 90 km/jam dan simpangan baku 10 km/jam. Berapakah peluang sebuah mobil yang diambil secara acak

a. Memiliki kecepatan lebih dari 100 km/jam?
b. Memiliki kecepatan kurang dari 60 km/jam?

7

C*all center* pada sebuah biro hukum menerima rata-rata 2.5 panggilan telepon pada jam makan siang di hari Kamis. Pengalaman menunjukkan bahwa petugas yang berjaga pada jam makan siang tersebut dapat menerima hingga 5 telepon pada jam tersebut. Untuk menguji reliabilitas *call center* tersebut, hitunglah peluang terdapat 6 atau lebih panggilan telepon pada rentang waktu tersebut?

8

Nilai akhir dari mahasiswa di sebuah kelas Statistik Bisnis memiliki rata-rata 70 dan simpangan baku 10. Berapa persen dari mahasiswa tersebut akan

a. Mendapatkan nilai A (nilai akhir>80)?
b. Lulus mata kuliah tersebut (nilai akhir>40)?
c. Tidak lulus mata kuliah tersebut (nilai akhir<40)?

9

Rata-rata jumlah tamu yang *check-in* pada meja resepsionis sebuah hotel per jam adalah 3.

a. Tentukan peluang pada jam tertentu tidak ada tamu yang datang
b. Tentukan peluang paling tidak datang 2 tamu dalam dua jam tertentu

10

Panjang sebuah komponen yang diproduksi oleh sebuah perusahaan diperkirakan berdistribusi normal dengan rata-rata 5 cm dan simpangan baku 0.02 cm. Jika dipilih sebuah komponen secara acak

a. Berapakah peluang panjang komponen terpilih antara 4.98 dan 5.02 cm?
b. Berapakah peluang panjang komponen terpilih antara 4.96 dan 5.04 cm?

11

Seorang penembak mampu menembak 4 dari 5 sasaran dengan tepat dengan mata tertutup. Jika dia menembak 4 kali, berapakah peluang

a. Mengenai lebih dari 2 sasaran?
b. Tidak mengenai paling tidak 3 sasaran?

12

Seorang sales asuransi mampu menjual rata-rata 3 polis dalam seminggu. Hitung peluang dalam seminggu tertentu dia mampu menjual

a. 2 atau lebih polis, tapi kurang dari 5 polis.
b. Dengan mengasumsikan terdapat 5 hari dalam seminggu, berapakah peluang dia akan mampu menjual satu polis pada satu hari tertentu?

13

Seorang teknisi pengendalian kualitas bertanggung jawab untuk menguji apakah 90% dari pemutar keping DVD yang diproduksi perusahaan sesuai spesifikasi. Untuk melakukan ini teknisi tersebut memilih secara acak 12 pemutar keping DVD setiap harinya. Dalam satu hari produksi tidak boleh lebih dari 1 pemutar keping DVD yang tidak sesuai spesifikasi. Jika hal tersebut terjadi, semua produk hari tersebut harus diuji.

a. Berapakah peluang teknisi melakukan kesalahan, dengan menyatakan bahwa produk hari tersebut telah memenuhi spesifikasi walau pada kenyataannya hanya 80% dari produk hari tersebut yang sesuai spesifikasi?
b. Berapakah peluang teknisi meminta untuk menguji semua produk hari tersebut walau ada kenyataannya 90% produk hari tersebut telah sesuai spesifikasi?

14

Sebuah sekolah memiliki 625 orang siswa dengan rata-rata usia 15,8 tahun dengan simpangan baku 0,6 tahun. Usia tersebut berdistribusi normal.

a. Berapa jumlah siswa yang usianya lebih muda dari 16,2 tahun?
b. Berapa jumlah siswa yang usianya kurang dari 14,4 tahun?

THANK YOU